ある正則概均質ベクトル空間に付随したadelic zeta distributionsについて(概均質ベクトル空間の研究)

木村, 達雄; 小木曽, 岳義

数理解析研究所講究録
718巻 1990年 165-191

ある正則概均質ベクトル空間に付随した adelic zeta distributions について

筑波大学数学系　木村達雄 (Tatsuo Kimura)
筑波大学数学研究科　小木曽岳義 (Takeyoshi Kogiso)

§0 : Introduction

k を数体，k_A を k の adele 環，$k_A^\times$ を k の idele 群とする。このとき，$k^\times = k\setminus\{0\}$ は $k_A^\times$ の離散正規部分群となり，商群 $k_A^\times/k^\times$ を idele 類群という。ここで，$\Omega(k_A^\times/k^\times)$ を $k_A^\times/k^\times$ から $\mathbb{C}^\times$ への連続準同型写像，即ち，idele 類群上の quasi characters の空間とする。そのとき，ω_s を $\omega_s(x)=|x|_A^s$ for $s\in\mathbb{C}$ と定義すると，ω_s は $\Omega(k_A^\times/k^\times)$ の元となり，$\sigma(\omega)$ を $|\omega(x)|_A=|x|_A^{\sigma(\omega)}$ for $\omega\in\Omega(k_A^\times/k^\times)$ と定義する。さらに，μ を $k_A^\times$ 上の Haar measure とし，$\mathcal{S}(k_A)$ を k_A 上の Schwartz-Bruhat 空間とする。以上の記号を準備して，次の話を考える。

$\Phi\in\mathcal{S}(k_A)$ の Fourier 変換 $\hat{\Phi}$ を次の様に定義する。

$$\hat{\Phi}(x)=\int_{k_A}\Phi(y)\,\psi(xy)\,dm(y)$$

ただし，m は k_A の不変測度で，ψ は k_A 上の指標で，$\psi(x)=\prod_p\psi_p(x_p)$ for $x=(x_p)_p$ とする。ただし，$\psi_p(x_p)$ は，p が有限素点のとき，$x_p=\sum_m C_m p^m$ ($C_m=0,1,2,\dots,p-1$) と書けるが，$\psi_p(x_p)=\exp(2\pi i(-\sum_{m<0}C_m p^m))$ とする。（以下では $\psi(xy)=\langle x,y\rangle$ と k_A と k_A^* の内積とみて k_A と k_A^* を同一視する）

このとき，$\hat{\Phi} \in \mathcal{S}(k_A)$となり，$\hat{\hat{\Phi}}(x) = \Phi(-x)$ となり，次の関係式が成立する。

(PF)：$\sum_{\xi \in k} \Phi(\xi) = \sum_{\xi \in k^*} \hat{\Phi}(\xi)$　（両辺絶対収束の下で）

このとき，Tate理論（c.f.[T]）より，以下のことが言える。

$Z(\omega)(\Phi) = \int_{k_A^\times} \Phi(x)\omega(x)\mu(x)$ としたとき，任意の$\xi \in k^\times$に対して，$\omega(x\xi) = \omega(x)$より，$Z(\omega)(\Phi)$は次の様にも書ける。

$Z(\omega)(\Phi) = \int_{k_A^\times/k^\times} (\sum_{\xi \in k^\times} \Phi(x\xi))\omega(x)\mu(x)$。ここで，$Z(\omega)(\Phi)$は，$\sigma(\omega) > 1$で，holomorphicであり，全$\Omega(k_A^\times/k^\times)$にmeromorphicに解析接続される。また，adelic Poisson formulaより，次が成立する。

$Z(\omega)(\hat{\Phi}) = Z(\omega_1\omega^{-1})(\Phi)$，ここで，$\omega_1 = |\ |_A$。

そこで，$k_A^\times$を$G = GL_1$のadele化，即ち$G_A = k_A^\times$とみなし，今までの事を既約正則概均質ベクトル空間上に拡張するのが井草理論である。$V = Aff^m$とし，(G, ρ, V)を数体k上定義された既約正則概均質ベクトル空間，fを固定されたそれの基本相対不変式とし，$\deg f = m$とするとき，$Z(\omega)(\Phi)$は，次の2通りに拡張される。（c.f.[I]）

<u>Case 1</u>：$\sigma(\omega) > \frac{n}{m}$のとき，$Z_m(\omega)$を$Z_m(\omega)(\Phi) = \int_{Y_A} \Phi(x)\omega(f(x))\mu(x)$と定義する。ここで，$\Phi \in \mathcal{S}(V_A)$で，$\mu$は$Y_A$上の$G_A$-不変な測度，$Y_A$は$V_A$の中のopen G_A-orbits全体とする。この時，特に，$V = Aff^1$，$G = GL_1$，$f(x) = x$とすると，$Z(\omega)(\Phi) = \int_{k_A^\times} \Phi(x)\omega(x)\mu(x)$となる。

<u>Case 2</u>：$Z(\omega)(\Phi) = \int_{k_A^\times/k^\times} (\sum_{\xi \in k^\times} \Phi(x\xi))\omega(x)\mu(x)$の拡張として，$Z_a(\omega) = \int_{G_A/G_k} (\sum_{\xi \in Y_k} \Phi(g\xi))\omega(\chi(g))dg$を考える。ここで，$dg$は，

$G_{\mathbb{A}}$上のHaar measureである。また，有理指標χは，$f(gx)=\chi(g)f(x)$をみたすものとする。この時，特に，$X=\mathrm{Aff}^1$，$G=GL_1$，$f(x)=x$の場合，$Z(\omega)(\Phi)=\int_{k_{\mathbb{A}}^{\times}/k^{\times}}(\sum_{\xi\in k^{\times}}\Phi(x\xi))\omega(x)\mu(x)$となる。

Z_mはEuler積をもち，その Euler積のEuler factorsのほとんど全てが，Igusa local zetaであり，また，Z_aは Siegel-Weil-formulaで定義された automorphic formのMellin変換とみなせることから，$Z_a(\omega)$と$Z_m(\omega)$の間の関係を調べることは自然である。以下では，[I]の中のMain theoremに関するある注意と，[I]で扱われていない，既約でない，あるタイプの概均質ベクトル空間について，Z_aとZ_mの関係を調べた。

§1：井草の定理（c.f.[I]）の紹介

§0で用意したP.V.(G,ρ,V)について，次の2つの条件を考える。

(F)：$|G_{\mathbb{A}}\backslash Y_{\mathbb{A}}|<\infty$，即ち，$Y_{\mathbb{A}}$が有限個の$G_{\mathbb{A}}$-orbitsに分かれる。

(HW)：もし，(G,ρ,V)が，k上$(\rho(G_0\times GL_d),M_d)$（[I]のtype(1)）と同値ならば，$G_0=SL_d$．ここで，$G_0$は$SL_d$の単位元を含む連結成分とする。

このとき，次の定理が成立する．

定理（井草）（c.f.[I]）

kを数体，(G,ρ,V)を固定された1つの基本相対不変式$f(x)\in k[V]$をもつ，k上定義された既約正則概均質ベクトル空間とし，(F)，(HW)をみたすとする。このとき，$\xi\in Y_k$のisotropy群G_ξは，

Connected semisimple であり, Tamagawa number $\tau(G_\xi)$ は ξ によらない。また, $Z_A(\omega) = \tau(G_\xi) Z_m(\omega)$ が成立する。

[証明のアウトライン]

次の3つの条件を考える。

(C1): 任意の Y_A の中の G_A-orbit は Y_k と交わる.

(C2): $G_A\xi_1 = G_A\xi_2,\ \xi_1, \xi_2 \in Y_k \Longrightarrow G_k\xi_1 = G_k\xi_2$

(C3): その Tamagawa number $\tau(G_\xi)$ は, $\xi \in Y_k$ のとり方によらない。

この(C1), (C2), (C3)が成立するとき, (C1)より, $|G_A \backslash Y_A| \leq |G_k \backslash Y_k|$, (C2)より, $l = |G_A \backslash Y_A| \geq |G_k \backslash Y_k|$ となり, 従って, $l = |G_A \backslash Y_A| = |G_k \backslash Y_k|$ となる.

即ち, (A1): $Y_A = \coprod_{i=1}^{l} G_A \xi_i$, (A2): $Y_k = \coprod_{i=1}^{l} G_k \xi_i$ が成立する。そして(C3)より,

(1-1): $Z_A(\omega)(\Phi) = \sum_{i=1}^{l} \int_{G_A/G_k} \left(\sum_{\xi \in G_k\xi_i} \Phi(g\xi) \omega(\nu(g)) \right) \mu_G(g)$

(1-2):
$$\int_{G_A/G_k} \left(\sum_{\xi \in G_k\xi_i} \Phi(g\xi) \right) \omega(\nu(g))\, d\mu_G(g)$$
$$= \int_{G_A/(G_{\xi_i})_k} \Phi(g\xi_i)\, \omega(f(x))\, d\mu_G(g)$$
$$= \int_{G_A \cdot \xi_i} \left\{ \int_{(G_{\xi_i})_A/(G_{\xi_i})_k} \Phi(gh\xi_i)\, \omega(\nu(gh))\, dh \right\} \mu_Y(x)$$
$$= \int_{G_A\xi_i} \Phi(x)\, \omega(f(x)) \left(\int_{(G_{\xi_i})_A/(G_{\xi_i})_k} dh \right) \mu_Y(x)$$
$$= \tau(G_{\xi_i}) \int_{G_A\xi_i} \Phi(x)\, \omega(f(x))\, \mu_Y(x)$$

(1-1) を (1-2) に代入して, $\tau(G_\xi)$ が ξ によらないことより, $\tau(G_{\xi_i}) = \tau$ とおく. このとき,

$$Z_A(\omega)(\Phi) = \sum_{i=1}^{l} \tau(G_{\xi_i}) \int_{G_A\xi_i} \Phi(x)\, \omega(f(x))\, \mu_Y(x) = \tau \int_{Y_A} \Phi(x)\, \omega(f(x))\, \mu_Y(x)$$

$= \tau Z_m(\omega)(\Phi)$ となる。それゆえ，G_ξの連結性と，(C1), (C2), (C3) と (F), (HW) を使って証明すればよい。

① : G_ξ の連結性について

これは次の lemma (in [I]) によりわかる。

Lemma

kを数体とし，(G, ρ, V)をk上定義された相対不変式$f(x)$をもつ，P.V.で条件(F)をみたすものとする。このとき，simply connected covering $\pi : H \twoheadrightarrow \mathfrak{D}(G)$で，次の性質をもつものが存在する。$H_\xi$は，connected simply connected で，$\pi(H_\xi) = G_\xi$をみたす。 //

(このLemmaの証明は略しますが，[I]ではP.5, P.6の9-typesをcase by caseでチェックして証明していることを注意しておきます。) //

② (C1)と(F)を使った，G_ξの連結性の証明

(F)により，kのplaces全体Σについて，Σの有限部分集合Sが存在して，任意の$v \notin S$について，G_vはY_vにtransitiveに作用する。—— ⓐ

このとき，elementary approximation theoremより，$\forall x = (x_v) \in Y_A$について，$\exists \xi \in V_k$ s.t. $\forall \varepsilon > 0$, $|x_v - \xi| < \varepsilon$ for all $v \in S$ となる。

実は，$\xi \in Y_k$である。何故なら，$\forall v \in S$について，

$$\begin{array}{ccccc} G_v \cdot x_v & \xhookrightarrow{\varphi :\ \text{cannonically embedding}} & Y_A & \hookrightarrow & V_A \\ \in & & \in & & \in \\ x_v & \longmapsto & (1,1,\dots,1,x_v,1,\dots,1) = \bar{x}_v & & (1,1,\dots,1,\xi,1,\dots,1) = \bar{\xi} \end{array}$$

が存在して，$\bar{x} = (1,1,\dots,1,x_v,1,\dots,1)$ の ε-近傍 $U_\varepsilon(\bar{x}_v) \subset Y_A$ は $\bar{\xi}$ を含むから，$\varphi^{-1}(U_\varepsilon(\bar{x}_v)) \ni \xi$ となり，$\xi \in G_v x_v \cap Y_k$ ---- ⓑ となる。

次に、$\xi = gx \in G_A x \cap Y_k$ であることを言おう。$v \in S$ ならば、ⓑより、$\xi = g_v x_v$ となり、$v \notin S$ ならば、ⓐより、G_v は Y_v に transitive に作用し、$Y_v \ni \xi$ より $G_v \cdot \xi = Y_v$ となる。従って、$\xi = g_v x_v$, $v \in \Sigma$ となる。
即ち、$(\xi, \dots, \xi) = \xi = gx$ for $g \in \prod_{v \in \Sigma} G_v$, $x = (x_v) \in Y_A$。このとき、$g \in G_A$ となる。

(∵)

$1 \longrightarrow G_\xi \longrightarrow G \longrightarrow Y = G \cdot \xi \longrightarrow 1$ の Galois cohomology をとって。

$$\begin{tikzcd}
G_\xi(\mathbb{F}_q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & G(\mathbb{F}_q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y(\mathbb{F}_q) \arrow[r] & H^1(\mathbb{F}_q, G_\xi) \arrow[d, equal, "\leftarrow \text{Lang's theorem}"] \\
H^0(\mathbb{F}_q, G_\xi) & H^0(\mathbb{F}_q, G) & & 1
\end{tikzcd}$$

$\therefore\ Y(\mathbb{F}_q) = G(\mathbb{F}_q) \cdot \bar{\xi} = G(\mathbb{F}_q) / G_\xi(\mathbb{F}_q)$ ------ (#)

この(#)を使って、$g \in G_A$ を証明しよう。

ある有限部分集合 S' が存在して、$\forall v \notin S'$ について、$x_v \in Y_v^0$, $\xi \in Y_v^0$。
ここで、$Y_v^0 = G(O_v)\xi \sqcup G(O_v)\xi' \sqcup \cdots$ となり、
mod π をとって、$Y(\mathbb{F}_q) = G(\mathbb{F}_q)\bar{\xi} \sqcup (G\mathbb{F}_q)\bar{\xi}' \sqcup \cdots$ となる。
(#)より、$Y_v^0 = G(O_v)\xi$ となる。$\therefore$ g_v を $G(O_v)$ の中からとれる。
$\therefore\ g \in G_A$

//

③ (F),(HW) を使った(C2)の証明

次の diagram を考える。

(**)
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & (G_\xi)_k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^1(k, G_\xi) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^1(k, G) \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & (G_\xi)_A \arrow[r] & G_A \arrow[r] & Y_A \arrow[r] & \prod_{v \in \Sigma} H^1(k_v, G_\xi) \arrow[r] & \prod_{v \in \Sigma} H^1(k_v, G)
\end{tikzcd}$$

$\xi = \xi_1,\ \xi_2 \in G_A \xi \subset Y_A$ とすると.

$$\xi_1 \stackrel{\delta'}{\longmapsto} 1 \in H^1(k_v, G_\xi),\ \xi_2 \stackrel{\delta'}{\longmapsto} 1 \in H^1(k_v, G_\xi) \text{ for all } v \in \Sigma$$

また，(**)の可換性より，$\delta\xi_1, \delta\xi_2 \in \alpha_G^{-1}(1)$，しかし，Hasse原理より，$\alpha_G^{-1}(1) = 1$ となり，$\xi_1, \xi_2 \in G_k$ となる。

④：(F)と(HW)を使った C(3)の証明

[I]の P.5, P.6 の 9-types を Case by Case でcheckして，次のdiagramを得ることができる。

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathcal{D}(G) = [G, G] & \xleftrightarrow{\ \rho\ } & GL(V) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ H_\xi & \longrightarrow & G_\xi & \longrightarrow & \rho(G_\xi) \end{array}$$

ここで，H_ξは connected semisimple simply connected，このとき，[I]の lemma 3 より，$\tau(H_\xi)/\tau(\rho(G_\xi))$ は ξ によらぬ。また，Tamagawa numberに関する Weil conjecture より，$\tau(H_\xi) = 1$。

$\therefore \tau(\rho(G_\xi))$ は ξ のとり方によらぬ。 //

従って，(G, ρ, V) は，C(1), C(2), C(3) を満たし $Z_a = \tau Z_m$ なる関係式をみたす。

Q.E.D. //

§2：井草の定理に対するある注意

§1の中で，C(2), C(3)を証明するのに(F)と(HW)を使ったが，C(1)は(F)とG_ξの連結性だけで証明できた。この事実は，この§で説明することとおおいに関係ある。我々の得た結果として，次のものがある。

Proposition a

kを数体, (G,ρ,V)を(F)をみたす, reductive k-regular P.V.とする。これが

(a1): $Y_k = G_k\xi$　　(a2): G_ξは, 連結　の条件をみたすとき, Z_mは

収束し, 関係式 $Z_a(\omega) = \tau(G_\xi) Z_m(\omega)$ が成立する。

∵ 仮定(a2)と(F)より, (C1)を得る。また仮定(a1)と(C1)より,

$1 \leq |G_A \backslash Y_A| \leq |G_k \backslash Y_k| = 1$　　∴ $|G_A \backslash Y_A| = 1$ となり, $Y_A = G_A \cdot \xi$ となる。

このとき, (C2), (C3)は自動的に成立し, 関係式 $Z_a(\omega) = \tau Z_m$ が成立する。 //

このProposition aのCorollaryとして次がいえる。

Corollary b : 井草の定理の中で, 条件(HW)は不要である。

∵ [I]のtype(1)においては. $Y_k = GL_d(k) = G_0(k) I_d\, {}^t GL_d(k) = G_k I_d$

であり, Proposition aより, 関係式 $Z_a(\omega) = \tau Z_m(\omega)$ が成立する。 //

§3: [I]で扱われていないP.V.に関するZaとZmの関係について.

ここで, Universally transitiveという概念を導入する。

定義 : kを数体とし, (G,ρ,V)をk上定義されたP.V.とする。

このとき, (G,ρ,V)のopen orbit Yがuniversally transitiveとは,

$\ell = |G_v \backslash Y_v| = 1$ for all $v \in \Sigma$ が成り立つことを言う。 //

以下では, [KKH]のType Iが全て, k-rational points Y_kが1つの

G_k-orbitであることを示す。

I : Non-irreducible simple P.V.s with universally transitive open orbitの場合

Example 1

$G = GL_1 \times GL_m \ni g = (\alpha, A)$， $V = V(m) \oplus V(m)^* \ni x = (x_1, x_2)$ について.
$\rho(g)x = (Ax_1, \alpha\,{}^tA^{-1}x_2)$ とする。このとき，(G,ρ,V) の相対不変式は，
$f(x) = f(x_1,x_2) = {}^tx_1x_2$ となる. (G,ρ,V) の open orbit $Y = \{f(x_1,x_2)\neq 0\}$
の k-rational point での orbit 分解を以下で考える.

generic point として，$\xi = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right)$ がとれるが，$\forall(x,y)\in Y_k$ について

$(x,y) = \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}\right)$ としたとき，$(x,y) = \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}\right)$ としたとき，

$x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$ としてよい.

先ず，G_kの作用で，$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}\right) \longmapsto \left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\\vdots\\y_m'\end{pmatrix}\right)$，$y_1' \neq 0$ にうつる.

さらに，
$$\left[\begin{array}{c|c}1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{array}\right]\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \alpha\left[\begin{array}{c|c}1 & 0 \\ \hline -\frac{y_2}{y_1} & \\ \vdots & I_{m-1} \\ -\frac{y_m}{y_1} & \end{array}\right]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}y_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

ここで，$\alpha = \frac{1}{y_1}$ とすれば，

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}\right) \underset{G_k}{\sim} \left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right)$$ が得られる.

$\therefore$ Y_k は 1つの G_k-orbit である。

//

Example 2

$(GL_1^m \times SL_m, \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_1)$ は，次の Example 3 に帰着される. //

Example 3

$G = GL_1^m \times GL(m) \ni g = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, A)$， $M(m, m+1) \ni X = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$

について，$\rho(g)X = (\alpha_1 A x_1, \alpha_2 A x_2, \ldots\ldots, \alpha_m A x_m, A x_{m+1})$ とする。

この(G,ρ,V)の基本相対不変式は，$f_i(x) = \det(x_1, x_2, \ldots, \check{x}_i, \ldots x_{m+1})$ $(i=1,2,\ldots,m+1)$ の $m+1$ ケより，(G,ρ,V)は既約でない。ところで，$[G,G]=SL(m)$ は simply connected であり，generic point として，$\xi = (\underbrace{e_1,e_2,\ldots,e_m}_{I_m}, \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix})$ がとれる。

$M_{m,m+1}(k) \supset Y(k) \ni {}^\forall x = (x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1})$ をとる。その中の$\det(x_1 \ldots x_m) \neq 0$ なる $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$について，$A=(x_1,x_2,\ldots,x_m)^{-1}$として，$Ax = (I_m | y)$，$y \neq 0$ とできる。ここで，$y = {}^t(y_1,y_2,\ldots,y_m)$とする。(∵ もし $y_1=0$ なら，$f_1=0$となり矛盾) 同様にして，$y_i \neq 0$ $(2 \leq i \leq m)$とできる。よって $B = (y_1, y_2, \ldots y_m, \begin{pmatrix} y_1^{-1}\\ y_2^{-1}\\ \vdots\\ y_m^{-1}\end{pmatrix})$ とおくと，$BAx = (I_m, \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}) = \xi$ となり，$Y_k = G_k \xi$ となる。 //

Example 4

$(GL_1^3 \times SL_{2m}, \Lambda_2 \otimes \Lambda_1^{(*)} \otimes \Lambda_1^{(*)})$ について，先ず$(GL_{2m}, \Lambda_2, Alt_{2m})$の場合を考えよう。$\underline{m=1}$ のとき，$\begin{bmatrix} 0 & x\\ -x & 0\end{bmatrix} = X$ について，$pf(X) = x$，

$\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x\\ -x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & abx\\ -abx & 0\end{bmatrix}$ より，$\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ とすれば，

$\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x\\ -x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ となる。

一般の場合

$m-1$ まで J_{m-1} となったとする。即ち，$X = \left[\begin{array}{c|c} J_{m-1} & X_2\\ \hline -X_2 & X_3\end{array}\right]$

(ここで，$X \in Y$について $X = \left[\begin{array}{c|c} X_{m-1} & X_2\\ \hline -{}^tX_2 & X_3\end{array}\right]$ としたとき，$\operatorname{rank} X_{m-1} = m-1$とは限らないが，$G_k$の作用は，行や列の permutation を引き起こすので $\operatorname{rank} X_{m-1} = m-1$ の場合に帰着してよい。)

このとき，

$$\begin{array}{c c} & \\ \begin{array}{c}2m\\2\end{array} & \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc}\underbrace{\quad}_{2m} & \underbrace{\ }_{2}\end{array}\end{array} \begin{pmatrix} J_{m-1} & X_2 \\ -{}^tX_2 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ {}^tA_2 & {}^tA_4 \end{pmatrix}$$

について、A_i $(1 \le i \le 4)$ を次の様にすると、

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -{}^tX_2 J_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_m & X_2 \\ -{}^tX_2 & X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & J_m X_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} = J_{m+1}$$ となり O.K.

$(GL_1^2 \times GL_{2m}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^{(*)} \oplus \Lambda_1^{(*)})$ については、作用の仕方より、$(SL_2 \times Sp_m, \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$ と同型より、Example 7の場合に帰着される。 //

Example 5

$(GL_1 \times GL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1)$ について、$\xi = \left(\begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ が generic point であり、表現空間の任意の k-rational point $X = \begin{pmatrix} X & y \\ -{}^ty & 0 \end{pmatrix}$ について、

これを、$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ -{}^tX_2 & 0 \end{pmatrix}$ と書いたとき、rank $X_1 = 2m$ としてよい。このとき、

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -{}^tX_2 J_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_m & X_2 \\ -{}^tX_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & J_m X_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 。また、ξ の isotropy 群 H_ξ は、

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より、$H_\xi = \left\{ \begin{pmatrix} Sp_m & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$

となり、このことより $\begin{pmatrix} I_{2m} & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり、$G_k \xi = V_k$ となる。 //

Example 6

$(GL_1^3 \times GL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^* \oplus (\Lambda_1 \oplus \Lambda_1)^*)$ について，表現空間は $V = V(m(2m+1)) \oplus V^*(2m+1) \oplus (V(2m+1)^* \oplus V(2m+1)^*))$ で，$V \ni \tilde{x} = (\tilde{X}, y_1, (y_2, y_3)) = (\tilde{X}, X)$ とする．

$$J' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & J \end{array}\right)\begin{array}{l}\}1 \\ \}2m\end{array}$$ についての $\tilde{G} = GL_1^3 \times GL_{2m+1}$ の isotropy 群 H は，

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline A' & A \end{array}\right) \in GL_{2m+1} \ ; A \in Sp_m \right\}。$$ よって．${}^{\forall}X = \left(\begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3 \\ \hline Z \end{array}\right) \in M(2m+1, 3)_k$

$A \in Sp_m(k)$ について，
$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha^{-1} & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right) X \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} (\alpha^{-1}x_1, \alpha^{-1}x_2, \alpha^{-1}x_3) + BZ \\ \hline AZ\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

となるが，今 [KKH] の Proposition 2.9 より，

$$X \underset{G_k}{\sim} \left(\begin{array}{c} z_1\ z_2\ z_3 \\ \hline Z_0 \end{array}\right) = X_0, \quad (z_1, z_2, z_3) \in k^3, \text{ ここで } Z_0 = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & & 1 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftarrow m+1$$

$B = (b_1, b_2, \ldots, b_{2m})$ s.t. $b_1 = -z_1$, $b_2 = z_1 + z_2 - z_3$, $b_{m+1} = -z_2$, $b_j = 0$ for ${}^{\forall}j \neq 1, 2, m+1$

このとき，$\left(\begin{array}{c|c} 1 & B \\ \hline 0 & I_{2m} \end{array}\right) X_0 I_3 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline Z_0 \end{array}\right)$. よって．$(X, \tilde{X}) \underset{G_k}{\sim} \left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & J \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline Z_0 \end{array}\right)\right)$ //

Example 7

$(GL_1^2 \times Sp_m, \Lambda_1 \oplus \Lambda_1, V(2m) \oplus V(2m))$ について，Y を P.V. (G, ρ, V) の open orbit とし，Y_k をその k-rational points とする。

$V(2m) \oplus V(2m) \ni X = (X_1, X_2)$ について．

$$\begin{pmatrix} 0 & f(X) \\ -f(X) & 0 \end{pmatrix} = {}^t X J X = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots x_{2m} \\ y_1, y_2, \cdots y_{2m} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_m \\ \hline -I_m & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{2m} & y_{2m} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} {}^t x \\ {}^t y \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} Jx & Jy \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & {}^t x J y \\ {}^t y J x & 0 \end{pmatrix}$$

より， $f(X) = {}^t x J y$ が，(G, ρ, V) の相対不変式．

$\left(\because\ {}^t X J X \longrightarrow {}^t X\, \underbrace{{}^t A J A}_{=J} X = {}^t X J X \right)$

$\xi = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$ について，$f(\xi) = 1 \neq 0$ 。 ∴ ξ は generic point に選べる．

このとき，$\mathfrak{f} = \left\{ \tilde{A} \in \mathfrak{g} \mid \tilde{A}\xi = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) + A\xi = 0 \right\} = \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{sp}(m-1)$

∵

$A \in \mathfrak{sp}(m)$ は．$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & -{}^t A_1 \end{array}\right)$，$B_1 = {}^t B_1$，$C_1 = {}^t C_1$ と置ける．

$(A_1 \in GL(m),\ B, C \in M(m))$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ a_{21} & a_2 & \cdots & a_{2m} & b_{12} & b_2 & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_m & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_m \\ \hline c_1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & -a_{11} & -a_{21} & \cdots & -a_{m1} \\ c_{12} & c_2 & \cdots & c_{2m} & -a_{12} & -a_{22} & \cdots & -a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{1m} & c_{2m} & \cdots & c_m & -a_{1m} & -a_{2m} & \cdots & -a_m \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & b_{1m} \\ \hline c_1 & -a_{11} \\ c_{12} & -a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ c_{1m} & -a_{1m} \end{array}\right) = 0$$

∴ $a_{11} = -\alpha = \beta$

$\mathfrak{f} \ni \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & C_1 \\ 0 & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & {}^t A_1^{-1} \\ 0 & \end{matrix} \end{array}\right) + \alpha \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array}\right)$ となり $\mathfrak{f} \cong \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{sp}(m-1)$

以下，これを使って，orbit 分解を考える．Lie 環から，1-parameter subgroup をつくり，ξ が Y_k の generic point であることを示そう．

$\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -{}^t A \end{array}\right);\ {}^t B = B,\ {}^t C = C \right\}$ について．

$$\exp\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & -{}^tA \end{array}\right) \longrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & {}^tA^{-1} \end{array}\right) ; A \in GL_m \right\} \subset Sp_m$$

$$\exp\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right) ; {}^tB = B \right\} \subset Sp_m$$

$$\exp\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline C & I_m \end{array}\right) ; {}^tC = C \right\} \subset Sp_m$$

このとき，これらを使って Y_k の generic point をさがしたい。$f(X) = {}^txJy$，

$X = (x \mid y) \in Y_k$，$x \neq 0$，$x = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ が基本相対不変式の1つで：

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & {}^tA^{-1} \end{array}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \left(\frac{Ax_1}{{}^tA^{-1}x_2}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \left(\frac{x_1 + Bx_2}{x_2}\right) \xrightarrow{B = I} \left(\frac{x_1 + x_2}{x_2}\right)$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{とし，} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix} \text{とおくと，} \left(\begin{array}{ccc|c} & I_m & & 0 \\ \hline -x_{m+1} & \cdots & -x_{2m} & \\ \vdots & 0 & & I_m \\ -x_{2m} & & & \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって．先ず generic point は．$X = \left(\begin{array}{c|c} 1 & y_1 \\ 0 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & y_{2m} \end{array}\right) \in Y_k$，$f(X) = (1, 0, \ldots, 0)\left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_m \\ \hline I_m & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_{2m} \end{pmatrix} = y_{m+1}$

$\therefore\ f(X) = y_{m+1} \neq 0 \qquad \therefore\ y_{m+1} = 1$ とする．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & -y_1' & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -y_{m+2} & \cdots & -y_{2m} & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & & & 0 & -y_2 & \cdots & -y_m \\ & 1 & & -y_2 & & & \\ & & \ddots & \vdots & & 0 & \\ & & 1 & -y_m & & & \\ \hline & & & 1 & & & \\ & 0 & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & y_1 \\ 0 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & y_m \\ \hline & y_{m+1} \\ 0 & \vdots \\ & y_{2m} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & 0 \\ \vdots & \\ 0 & \\ \hline & 1 \\ 0 & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right) = \xi$$

となり，作用させた各行列は．G_k の元より，$Y_k = G_k\xi$ となっている．//

<u>Example 8</u>

$(Spin_{10} \times GL_1$，(half-spin rep.) $\oplus$ (the vector rep.)) について．

$A \in \mathfrak{o}(10) = \mathrm{Lie}(Spin_{10})$ の半スピン表現を $d\rho_1(A)$ としたとき，$\mathfrak{o}(10) \oplus \mathfrak{gl}(1)$

$= Lie(Spin_{10} \times GL_1) \ni (A, \lambda)$ の表現は．[S-K] P.119〜P.121 より，

$$
dP_1(A)+\lambda I = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
a_1+\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & -a_{15} \\
a_{21} & a_2+\lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} & -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} & -a_{25} \\
a_{31} & a_{32} & a_3+\lambda & a_{34} & a_{35} & -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} & -a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4+\lambda & a_{45} & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 & -a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \lambda & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \\
\hline
0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & a_{51} & \lambda-a_1 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} \\
-c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & a_{52} & -a_{12} & \lambda-a_2 & -a_{32} & -a_{42} & -a_{52} \\
-c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & a_{53} & -a_{13} & -a_{23} & \lambda-a_3 & -a_{43} & -a_{53} \\
-c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & a_{54} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & \lambda-a_4 & -a_{54} \\
-c_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & \lambda
\end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
d_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{15} \\
a_{21} & d_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{25} \\
a_{31} & a_{32} & d_3 & a_{34} & a_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & d_4 & a_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & d_5 & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & a_{51} & d_1' & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{52} & -a_{12} & d_2' & -a_{32} & -a_{42} & -a_{52} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{53} & -a_{13} & -a_{23} & d_3' & -a_{43} & -a_{53} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{54} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & d_4' & -a_{54} \\
-a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & d_5'
\end{array}\right)
+ \left(\begin{array}{c|c}
0 & \begin{matrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} & 0 \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} & 0 \\ -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\
\hline
0 & 0
\end{array}\right) +
$$

$$
\left(\begin{array}{c|c}
0 & 0 \\
\hline
\begin{matrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 \\ -c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & 0 \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & 0 \\ -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0
\end{array}\right), \quad \text{ここで，} \lambda = \frac{d_i + d_i'}{2} \quad (1 \leq i \leq 5)
$$

そこで，$\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^2 = 0$ より，1-parameter subgroup は．

$$
\exp t \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = I + t \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & tB \\ \hline 0 & I \end{array}\right)
$$

，同様にして．

$$\exp t\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right) = I + t\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right) = I + t\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline tC & I \end{array}\right)$$

となることなどに注意して、$\xi = {}^t(10000\ 10000)$ が、$G_k \xi = Y_k$ をみたすことを以下で示そう。($x_1 \neq 0$, $x_6 \neq 0$ と仮定してよい。)

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & & & & & 0 & \frac{x_2}{x_6} & \frac{x_3}{x_6} & \frac{x_4}{x_6} & 0 \\
 & 1 & & & & -\frac{x_2}{x_6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & & & -\frac{x_3}{x_6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & & -\frac{x_4}{x_6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & \frac{x_7}{x_1} & \frac{x_8}{x_1} & \frac{x_9}{x_1} & 0 & 1 & & & & \\
-\frac{x_7}{x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & & & \\
-\frac{x_8}{x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 1 & & \\
-\frac{x_9}{x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} x_1 + \frac{x_7}{x_6}x_2 + \frac{x_8}{x_6}x_3 + \frac{x_9}{x_6}x_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ \frac{x_7}{x_1}x_2 + \frac{x_8}{x_1}x_2 + \frac{x_9}{x_1}x_4 + x_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{10} \end{pmatrix}$$

、また、

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{51} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow{\exp t(\ )}
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \\
ta_{51} & & & & 1 & & & & & \\ \hline
t^2a_{51}^2 & & & & ta_{51} & 1 & & & & -ta_{51} \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
-ta_{51} & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)$$

について、

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \\
-\frac{y_5}{y_1} & & & & 1 & & & & & \\ \hline
\frac{y_5^2}{y_1^2} & & & & -\frac{y_5}{y_1} & 1 & & & & \frac{y_5}{y_1} \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
\frac{y_5}{y_1} & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_5 \\ y_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_{10} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_6 + \frac{y_5}{y_1}y_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_5 + y_{10} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{10} \end{pmatrix}$$

、さらに、$z_1 \neq 0$ としてよいから、

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \\
\frac{z_{10}}{z_1} & & & & 1 & & & & & \\
\hline
\frac{z_{10}^2}{z_1^2} & & & & \frac{z_{10}}{z_1} & 1 & & & & -\frac{z_{10}}{z_1} \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
-\frac{z_{10}}{z_1} & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{10} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

このとき，$a_1 = \frac{1}{2}(\log\sqrt{\frac{z_6}{z_1}})$，$\lambda = -\log\sqrt{z_1 z_6}$ ととれば，$e^{\alpha_1} = \frac{1}{z_1}$，$e^{\alpha_1'} = \frac{1}{z_6}$ となり，$\mathrm{diag}[\frac{1}{z_1} * * * *, \frac{1}{z_6} * * * *]$ を ${}^t[z_1, 0000\ z_6\ 0000]$ にほどこし，$Y_k = G_k\xi$ となる。 //

Example 9

$(GL_1^2 \times Spin_{10}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1)$，$\Lambda_1$ = half spin rep. については，$(GL_1 \times Spin_{10}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1)$ について，Y_k が 1つの G_k-orbit かどうかを確かめればよい。

$V = V(16) = \{1, e_ie_j, e_ie_je_ke_l\}$ $(1 \leq i < j < k \leq 5)$

$= \{1, e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_1e_5, e_2e_3, e_2e_4, e_2e_5, e_3e_4, e_3e_5, e_4e_5, e_1e_2e_3e_4, e_1e_2e_3e_5, e_1e_2e_4e_5, e_2e_3e_4e_5\}$. $A \in O(10)$ について．

1) $d\rho_1(A)\cdot 1 = -\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2} + \sum_{i<j} b_{ij} e_i e_j$

2) $$d\rho_1(A)e_ke_l = \sum_{i \neq k} a_{ik} e_i e_l - \sum_{i \neq l} a_{il} e_i e_k + \frac{a_k + a_l}{2} e_k e_l - \sum_{s \neq k,l} \frac{a_s}{2} e_k e_l + \sum_{i<j} b_{ij} e_i e_j e_k e_l - c_{kl} \qquad (k<l)$$

3) $$\begin{aligned} d\rho_1(A)e_ke_le_me_n = {} & a_{sk} e_s e_l e_m e_n - a_{sl} e_s e_k e_m e_n + a_{sm} e_s e_k e_l e_n \\ & - a_{sn} e_s e_k e_l e_m + \frac{a_k + a_l + a_m + a_n - a_s}{2} e_k e_l e_m e_n \\ & - c_{kl} e_m e_n + c_{km} e_l e_n - c_{kn} e_l e_m - c_{lm} e_k e_n + c_{ln} e_k e_m - c_{mn} e_k e_l \end{aligned}$$

ここで，$1\le k<l<m<n\le 5$であり，$\{s,k,l,m,n\}=\{1,2,3,4,5\}$とする．

これより，次のような表現を得る．

$$
d\ell_1(A)=\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
A_1 & -c_{12} & -c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & -c_{23} & -c_{24} & -c_{25} & -c_{34} & -c_{35} & -c_{45} & & & & & \\
b_{12} & A_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} & & & & -c_{34} & -c_{35} & -c_{45} & & \\
b_{23} & a_{32} & A_3 & & & & & & -a_{14} & -a_{15} & & c_{24} & c_{25} & & -c_{45} & \\
b_{14} & a_{42} & & A_4 & & & & & a_{13} & & -a_{15} & -c_{23} & & c_{25} & c_{35} & \\
b_{15} & a_{52} & & & A_5 & & & & & a_{13} & a_{14} & & -c_{23} & -c_{24} & -c_{34} & \\
b_{23} & -a_{31} & & & & A_6 & & & -a_{24} & -a_{25} & & -c_{14} & -c_{15} & & & -c_{45} \\
b_{24} & -a_{41} & & & & & A_7 & & a_{23} & & -a_{25} & -c_{13} & & -c_{15} & & c_{35} \\
b_{25} & -a_{51} & & & & & & A_8 & & a_{23} & a_{24} & & c_{13} & c_{14} & & -c_{34} \\
\hline
b_{34} & & -a_{41} & a_{31} & & -a_{42} & a_{32} & & A_9 & a_{45} & -a_{35} & -c_{12} & & & -c_{15} & -c_{25} \\
b_{35} & & -a_{51} & & a_{31} & -a_{52} & & a_{32} & a_{54} & A_{10} & a_{34} & & c_{12} & & c_{14} & c_{24} \\
b_{45} & & & -a_{51} & a_{41} & & -a_{52} & a_{42} & -a_{53} & a_{43} & A_{11} & & & -c_{12} & -c_{13} & -c_{23} \\
 & b_{34} & -b_{24} & b_{23} & & b_{14} & -b_{13} & & b_{12} & & & A_{12} & a_{45} & -a_{35} & a_{25} & -a_{15} \\
 & b_{35} & -b_{25} & & b_{23} & b_{15} & & -b_{13} & & b_{12} & & a_{54} & A_{13} & a_{34} & -a_{24} & a_{14} \\
 & b_{45} & & -b_{25} & b_{24} & & b_{15} & -b_{14} & & & b_{12} & -a_{53} & a_{43} & A_{14} & a_{23} & -a_{13} \\
 & & b_{45} & -b_{35} & b_{34} & & & & b_{15} & -b_{14} & b_{13} & a_{52} & -a_{42} & a_{32} & A_{15} & a_{12} \\
 & & & & & b_{45} & -b_{35} & b_{34} & b_{25} & -b_{24} & b_{23} & -a_{51} & a_{41} & -a_{31} & a_{21} & A_{16}
\end{array}\right)
$$

但し，

$$A_1=\frac{1}{2}(-a_1-a_2-a_3-a_4-a_5)$$
$$A_2=\frac{1}{2}(a_1+a_2-a_3-a_4-a_5)$$
$$A_3=\frac{1}{2}(a_1-a_2+a_3-a_4-a_5)$$
$$A_4=\frac{1}{2}(a_1-a_2-a_3+a_4-a_5)$$
$$A_5=\frac{1}{2}(a_1-a_2-a_3-a_4+a_5)$$
$$A_6=\frac{1}{2}(-a_1+a_2+a_3-a_4-a_5)$$
$$A_7=\frac{1}{2}(-a_1+a_2+a_3+a_4-a_5)$$
$$A_8=\frac{1}{2}(-a_1+a_2-a_3-a_4+a_5)$$
$$A_9=\frac{1}{2}(-a_1-a_2+a_3+a_4+a_5)$$
$$A_{10}=\frac{1}{2}(-a_1-a_2+a_3-a_4+a_5)$$
$$A_{11}=\frac{1}{2}(-a_1-a_2-a_3+a_4+a_5)$$
$$A_{12}=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4-a_5)$$
$$A_{13}=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3-a_4+a_5)$$
$$A_{14}=\frac{1}{2}(a_1+a_2-a_3+a_4+a_5)$$
$$A_{15}=\frac{1}{2}(a_1-a_2+a_3+a_4+a_5)$$
$$A_{16}=\frac{1}{2}(-a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$

ここで

$$x=x_1e_1+x_2e_1e_2+x_3e_1e_3+x_4e_1e_4+x_5e_1e_5+x_6e_2e_3+x_7e_2e_4$$
$$+x_8e_2e_5+x_9e_3e_4+x_{10}e_3e_5+x_{11}e_4e_5+x_{12}e_1e_2e_3e_4+x_{13}e_1e_2e_3e_5$$

$+x_{14}e_1e_2e_4e_5+x_{15}e_1e_3e_4e_5+x_{16}e_2e_3e_4e_5$ とおく。

$X_0=(1+e_1e_2e_3e_4)={}^t(1,0,\ldots\ldots,0,\underset{\widehat{12}}{1},0000)\in V(16)$ が generic point で、isotropy algebra $\mathfrak{g}_{X_0}$ は、$\mathfrak{g}_{X_0}=\mathfrak{gl}(1)\oplus\mathfrak{o}(7)\oplus V(8)$，ここで $V(8)$ は Vector 群の Lie 環で 8 次元のもの。よって、isotropy 群は、$(GL(1)\times Spin_7)(G_a)^8$

$$\rho(GL_1'\times Spin_{10})X_0=GL(1)\times Spin_{10}\Big/(GL(1)\times Spin_7)(G_a)^8$$

以下で，$\forall x\in Y$ が，$GL(1,k)\times Spin_{10}(k)$ の作用で，${}^t(1,0,0\text{------},1,0000)$ にうつることをみよう。このとき，($x_{12}\neq0$，$x_{13}\neq0$，$x_9\neq0$ としてよいから)

$${}^t\Big[I+\Big(-\frac{x_2}{x_{12}}\Big)\Big]\Big[E_{1,9}+E_{2,12}+E_{5,15}+E_{8,16}\Big]\Big[I+\Big(\frac{y_3}{y_9}\Big)\Big(-E_{3,9}+E_{5,11}\Big)\Big]\Big[I+\Big(\frac{w_5}{w_{13}}\Big)\Big(-E_{4,12}-E_{5,13}\Big)\Big]\Big[I+\frac{u_6}{u_9}\Big(-E_{6,9}-E_{8,10}\Big)\Big]$$
$$\times\Big[I+\frac{v_7}{v_9}\Big(-E_{7,9}-E_{8,10}\Big)\Big]\Big[I+\frac{s_8}{s_{13}}\Big(-E_{7,2}-E_{8,13}\Big)\Big]$$

なる変形を経て、

${}^t(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_{16})\longrightarrow{}^t(\tilde{x}_1,0\text{---}0,\tilde{x}_9,\tilde{x}_{10},\tilde{x}_{11},\tilde{x}_{12},\tilde{x}_{13},\tilde{x}_{14},\tilde{x}_{15},\tilde{x}_{16})$ とできる。

これに，$\Big[I+\frac{x_4}{x_1}\Big(-E_{9,1}-E_{12,2}-E_{15,5}-E_{16,8}\Big)+\frac{x}{x_1}\Big(-E_{6,1}-E_{13,2}-E_{14,4}-E_{16,7}\Big)+\frac{x_{11}}{x_1}\Big(-E_{11,1}-E_{14,2}-E_{15,3}-E_{16,7}\Big)\Big]$ を作用させて，${}^t(x,0000000000\,x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16})$ を得る。

さらに，$\Big[I+\frac{x_{15}}{x_{12}}\Big(-E_{5,2}-E_{15,12}\Big)+\frac{x_{16}}{x_{12}}\Big(-E_{8,2}-E_{16,12}\Big)+\frac{x_{13}}{x_{12}}\Big(-E_{10,9}-E_{13,12}\Big)+\frac{x_{14}}{x_{12}}\Big(-E_{11,9}-E_{13,12}\Big)\Big]$ を作用させて，${}^t(x_1,0000000000\,x_{12},0000)$ を得る。

このとき，$a_4=\log\frac{x_{12}}{x_1}$，$a_5=\log\frac{1}{x_1x_{12}}$ とすれば，

$e^{\frac{-a_4-a_5}{2}}=\frac{1}{x_1}$，$e^{\frac{a_4-a_5}{2}}=\frac{1}{x_{12}}$

$$\therefore\ \mathrm{diag}\Big[\frac{1}{x_1},e^{\frac{-a_4-a_5}{2}},e^{\frac{-a_4-a_5}{2}},e^{\frac{-a_4-a_5}{2}},e^{\frac{-a_4-a_5}{2}},e^{\frac{-a_4-a_5}{2}},e^{\frac{-a_4-a_5}{2}},e^{\frac{-a_4+a_5}{2}}$$
$$e^{\frac{-a_4+a_5}{2}},e^{\frac{a_4-a_5}{2}},e^{\frac{-a_4+a_5}{2}},e^{\frac{a_4+a_5}{2}},e^{\frac{a_4-a_5}{2}},\frac{1}{x_{12}},e^{\frac{a_4+a_5}{2}},e^{\frac{a_4+a_5}{2}},e^{\frac{a_4+a_5}{2}}\Big]$$

(ここに表われる e^x たちは全て k の元となる) を作用させて，

${}^t(1,0\,0000000000\,10000)$ を得る。 //

以上のことより，次が成り立つ．

Theorem C

Universally transitive open orbits をもつ既約でない単純正則概均質ベクトル空間は，次の9つで，それらは全て open orbit Y の k-rational point Y_k が1つの G_k-orbit より，関係式 $Z_a(\omega)=\tau Z_m(\omega)$ をみたす。

(1) $(GL_1 \times GL_m,\ \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*)$

(2) $(GL_1^{m+1} \times GL_m,\ \overbrace{\Lambda_1 \oplus \cdots\cdots \oplus \Lambda_1}^{m})$

(3) $(GL_1^{m} \times GL_m,\ \overbrace{\Lambda_1 \oplus \cdots\cdots \oplus \Lambda_1}^{m} \oplus \Lambda_1^{(*)})$

(4) $(GL_1^2 \times GL_{2m},\ \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^{(*)} \oplus \Lambda_1^{(*)})$

(5) $(GL_1 \times GL_{2m+1},\ \Lambda_2 \oplus \Lambda_1)$

(6) $(GL_1^3 \times GL_{2m+1},\ \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus (\Lambda_1 \oplus \Lambda_1)^{(*)}$

(7) $(GL_1^2 \times Sp_m,\ \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$

(8) $(GL_1^2 \times Spin_n,$ (a half-spin rep.) $\oplus$ (the vector rep.)) with $n=8,10$

(9) $(GL_1^2 \times Spin_{10},\ \Lambda \oplus \Lambda)$ with Λ = the even half-spin rep. //

II: 2-Simple non-irreducible regular P.V. with universally transitive open orbit property の場合

Example 10

$(GL_1 \times GL_5 \times GL_2,\ \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + (\Lambda_1 + \Lambda_1)^{(*)} \otimes 1)$ について，表現空間は．

$V = V(10)\otimes V(2) \oplus (V(5)\oplus V(5))^{(*)} \cong Alt(5)\oplus Alt(5)\oplus(\bar{k}^5\oplus\bar{k}^5)$ で、

作用は、$g=(\alpha,A,B)\in(GL_1\times GL_5\times GL_2)$ と $\tilde{x}=((X,Y),\underbrace{(y_1,y_2)}_{Z})\in V$

s.t. ${}^*X=-X$, ${}^*Y=-Y$, $y_1,y_2\in\bar{k}^5$ について、

$\rho(g)\tilde{x} = (\,(AX{}^*A,\ AY{}^*A)^*B,\ A^{-1}[y_1 y_2]\begin{bmatrix}1 & \\ & (\alpha)\end{bmatrix})$ となる。

このとき、generic pointは、[KKH]のproposition3より、

$$\tilde{x}_0 = \left\{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|cc} & O & & 1&0\\ &&& 0&1\\ &&& 0&0\\ \hline -1&0&0&0&-1\\ 0&-1&0&1&0\end{array}\right)}_{X_0},\ \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|cc} & O & & 0&0\\ &&& -1&0\\ &&& 0&-1\\ \hline 0&1&0&0&-1\\ 0&0&1&1&0\end{array}\right)}_{Y_0},\ \underbrace{\left(\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{O}\\ \hline 1&0\\ 0&1\end{array}\right)}_{Z_0}\right\}$$

で、$\tilde{x}_0$ の isotropy 群 $H_{\tilde{x}_0}=\{1\}$

となる。以下で、Y_k の G_k-orbit 分解を与える。

1st. step

${}^*\tilde{A}_0 Z = \begin{bmatrix}O\\ *\ *\\ *\ *\end{bmatrix}$ となるように、$\tilde{A}_0\in GL_5(k)$ をとり、$(\tilde{A}_0X{}^*\tilde{A}_0,\ \tilde{A}_0Y{}^*\tilde{A}_0)$ を改めて、(X,Y) とおく。

2nd. step

$$(*)\quad {}^*A^{-1}[y_1 y_2]\begin{bmatrix}1 & \\ & (\alpha)\end{bmatrix} = (e_4,e_5) = \begin{bmatrix}O\\ 1\ 0\\ 0\ 1\end{bmatrix} \longleftrightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2\\ \hline O & \begin{smallmatrix}\alpha&0\\0&\alpha\end{smallmatrix}\end{array}\right)$$

に注意して、(X,Y) が G_k の作用で、(X_0,Y_0) に移ることを示す。

$$X = \left(\begin{array}{c|c|c} X_1 & 0 & X_2\\ \hline 0 & 0 & 0\\ \hline -{}^*X_2 & 0 & X_4\end{array}\right)$$ と $*$-type の A_1 で $\rho(A_1)X=\tilde{A}_1X{}^*\tilde{A}_1 = X' = \left(\begin{array}{c|c|c} O & 0 & I_2\\ \hline 0 & 0 & 0\\ \hline -I_2 & 0 & O\end{array}\right)$

とできる。 $\tilde{A}_1Y{}^*\tilde{A}_1 = Y'$ に、X' を変えない B の右からの作用を考えて、

$$Y' = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0&*&*&0&*\\ *&0&*&*&0\\ \hline *&*&0&*&*\\ \hline 0&*&*&0&*\\ *&0&*&*&0\end{array}\right)$$ としてよい。

このとき、第3行を、何倍かして、第1,2行に加えたり、引いたり

する行列を $\widetilde{A}_2$ としてやると，

$$\widetilde{A}_2 X'^* \widetilde{A}_2 = X' := X'', \quad \widetilde{A}_2 Y'^* \widetilde{A}_2 = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ \hline * & * & 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{array}\right) = Y'' \text{ となる.}$$

このとき，適当な，$\widetilde{A}_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} I_2 & * & O \\ \hline * * & 1 & 0 \\ \hline O & 0 & I_2 \end{array}\right)$ を作用させて，

$$\widetilde{A}_3 X''^* \widetilde{A}_3 = X'' = X', \quad \widetilde{A}_3 Y''^* \widetilde{A}_3 = \left(\begin{array}{cc|c|cc} \multicolumn{2}{c|}{O} & 0 & \multicolumn{2}{c}{O} \\ & & 1 & & \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & & 0 & -1 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{array}\right) = Y^{(4)} \quad (\operatorname{rank} Y = 4 \text{ より})$$

となる。 $\widetilde{A}_4$ を2行と4行に加える行列とすると，

$$\widetilde{A}_4 X'^* \widetilde{A}_4 = X', \quad \widetilde{A}_4 Y^{(4)*} \widetilde{A}_4 = \left(\begin{array}{cc|c|cc} \multicolumn{2}{c|}{O} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ となり，} B = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \text{ を右から}$$

作用させれば，

$$(\widetilde{A}_4 X'^* \widetilde{A}_4, \widetilde{A}_4 Y^{(4)*} \widetilde{A}_4)^* B = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c|cc} \multicolumn{2}{c|}{O} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|cc} \multicolumn{3}{c|}{O} & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \right\}$$

ここで，今までの $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \widetilde{A}_4$ は全て $*$-type より，

$${}^*(\widetilde{A}_4 \widetilde{A}_3 \widetilde{A}_2 \widetilde{A}_1)^{-1} \left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{O} \\ \hline \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{O} \\ \hline \alpha' & 0 \\ 0 & \alpha' \end{array}\right] \text{ となる。} B = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \left(\frac{1}{\alpha'}\right) \end{bmatrix} \text{ ととれば，} \left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{O} \\ \hline \alpha' & 0 \\ 0 & \alpha' \end{array}\right]^* B = \left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{O} \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

とできる。

Example 11

$(GL_1^2 \times Sp_m \times GL_{2m},\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda^{(*)} + \Lambda_1^{(*)}))$ の表現空間は，

$V = V(2m) \otimes V(2m) \oplus (V(2m)^{(*)} \oplus V(2m)^{(*)}) \cong M(2m, 2m) \oplus (V(2m)^{(*)} \oplus V(2m)^{(*)})$,

作用は，$V \ni \tilde{x} = (X, (y_1, y_2))$ と $g = (\alpha, \beta, A, B) \in GL_1^2 \times Sp_m \times GL_{2m}$ について.

$\rho(g)\tilde{x} = (AX^*B,\ \alpha^* y_1{}^* B,\ \beta y_2{}^* B)$ となる。

$\xi = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ 0 & \\ \hline 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right) \right\}$ が generic point で, $X = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_5 \\ X_2 & X_6 \\ \hline X_3 & X_7 \\ X_4 & X_8 \end{array}\right)$, $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline C & {}^*A_1^{-1} \end{array}\right)$ s.t. ${}^*B = B$

${}^*C = C$ について.
$$\left(\begin{array}{c|c} I_m & \begin{matrix} B_1 & B_2 \\ {}^*B_2 & B_4 \end{matrix} \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline \begin{matrix} C_1 & C_2 \\ {}^*C_2 & C_4 \end{matrix} & I_m \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_5 \\ X_2 & X_6 \\ \hline X_3 & X_7 \\ X_4 & X_8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & 0 \\ X_2 & 0 \\ \hline 0 & X_7 \\ 0 & X_8 \end{array}\right)$$
とできる。さらに、
$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} I_m & 0 \\ -X_8 & I_{n-m} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} I_m & -X_8 \\ 0 & I_{n-m} \end{matrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} I_m & 0 \\ {}^*A_3' & I_{n-m} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} I_m & A_3' \\ 0 & I_{n-m} \end{matrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_1^{-1} & \\ & I_{n-m} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} {}^*X_1 & \\ & I_{n-m} \end{matrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} I_m & 0 \\ A_3 & I_{n-m} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} I_m & {}^*A_3^{-1} \\ 0 & I_{n-m} \end{matrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_5 \\ X_2 & X_6 \\ \hline X_3 & X_7 \\ X_4 & X_8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{array}\right),$$
また,
$$B \left(\begin{array}{c|c} y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_m & z_m \\ \hline y_{m+1} & z_{m+1} \\ \vdots & \vdots \\ y_{2m} & z_{2m} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \vdots & 0 \\ 1 & \\ \hline & 1 \\ 0 & \vdots \\ & 1 \end{array}\right)$$
とできるから，最初の段階で，X を $X{}^*B$ ととり直しておけばよい。

//

Example 12

$(GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m+1}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1)$ の表現空間は $V = V(2m) \otimes V(2m+1) \oplus V(2m)$ で，作用は，$V \ni \tilde{x} = (\tilde{X}, y)$，$\tilde{X} \in M(2m, 2m+1)$，$y \in V(2m)$ と，$G = GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m+1} \ni (\alpha, A, B)$ について，$\rho(g)\tilde{x} = (A\tilde{X}{}^*B, Ay)$ とする。

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X_1 & & X_6 & & \\ X_2 & & X_7 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_3 & & X_8 & & \\ X_4 & & X_9 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
と仮定してよい。（∵ $\tilde{A}_1 \in Sp_m$ の作用で，そうできる。）

さらに.
$$\begin{pmatrix} A_{m-1} & & B_{m-1} & \\ & & & \\ C_{m-1} & & {}^*A_m' & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1' & & X_5' & & \\ X_2' & & X_6' & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_3' & & X_7' & & \\ X_4' & & X_8' & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{m-1} & & 0 & & \\ 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & I_{m-1} & & \\ 0 & & 0 & & \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
とできる.

$\tilde{A}_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2m} \end{bmatrix}$ を改めて $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2m} \end{bmatrix}$ とするとき，$\tilde{A}_2$ の ▨ の部分を次の様にしてやればよい，

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{m-1} & \mathbf{a} & B_{m-1} & \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{a}' & a & {}^t\mathbf{b} & b \\ \hline C_m & \mathbf{c} & {}^tA_{m-1}^{-1} & {}^t\mathbf{a}_1' \\ \hline {}^t\mathbf{c} & c & {}^t\mathbf{a}_1'^{-1} & -a \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline y_3 \\ \hline y_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A_{m-1}y_1 + \mathbf{a}_1 y_2 + B_{m-1}y_3 + \mathbf{b}_1 y_4 \\ \hline \mathbf{a}' y_1 + a y_2 + \mathbf{b}_1 y_3 + b y_4 \\ \hline C_{m-1}y_1 + \mathbf{c} y_2 + {}^tA_{m-1}^{-1} y_3 + {}^t\mathbf{a}'^{-1} y_4 \\ \hline \mathbf{c} y_1 + c y_2 + {}^t\mathbf{a}'^{-1} y_3 - a y_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} O \\ \hline 1 \\ \hline O \\ \hline 1 \end{array}\right)$$ となるように.

$a, b, c, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}$ と選べる.

$$\widetilde{A}_2\widetilde{A}_1X = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_{m-1} & z_1 & O & z_5 & z_9 \\ \hline O & z_2 & O & z_6 & z_{10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline O & z_3 & I_{m-1} & z_7 & z_{11} \\ \hline O & z_4 & O & z_8 & z_{12} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ に GL_{2m+1} の右からの作用での列変換より $$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_{m-1} & 0 & O & 0 & 0 \\ \hline O & z_2 & O & z_6 & z_{10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline O & 0 & I_{m-1} & 0 & 0 \\ \hline O & z_4 & O & z_8 & z_{12} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

とできる. さらに, y_0 と変えない, Sp_m の作用と. GL_{2m+1} の作用で.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_{m-1} & 0 & O & 0 & 0 \\ \hline O & \begin{smallmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{smallmatrix} & O & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline O & 0 & I_{m-1} & 0 & 0 \\ \hline O & 0 & O & \begin{smallmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_m & O & 0 \\ O & O & 0 \\ \hline O & I_m & \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} \\ O & O & 0 \end{array}\right)$$ とできる。

//

Example 13

$(GL_1^3 \times Sp_m \times GL_{2m}, \Lambda_1\otimes\Lambda_1 + \Lambda_1\otimes 1 + 1\otimes(\Lambda_1+\Lambda_1))$ の表現空間及びその元は, $V(2m)\otimes V(2m+1)\oplus V(2m)\oplus(V(2m+1)\oplus V(2m+1))^{(*)} \cong M(2m, 2m+1)\oplus V(2m)\oplus(V(2m+1)\oplus V(2m+1))^{(*)} \ni (X, x, (y_1, y_2))$ で,

作用は. $\rho(g)\widetilde{x} = (\alpha AX{}^tB, \beta Ax, ({}^tBy_1, {}^tBy_2)\begin{pmatrix}1 & \\ & \gamma\end{pmatrix})$ で

generic point は. $$\widetilde{x}_0 = \left\{ {}^t\left[\begin{array}{c|c|c|c} I_m & O & O & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\;0 \end{array}\right], {}^t(\;1\;|\;1\;], {}^t\left[\begin{array}{c|c} 1\cdots 1 & O \\ \hline O & 1\cdots 1 \end{array}\right]\right\}$$

<u>1st. step.</u>

$\widetilde{B}_0 \in GL_{2m+1}$ をとり，$\widetilde{B}_0 y = \left(\begin{array}{c|c} y_1 & y_1' \\ \vdots & \vdots \\ y_{m-1} & y_{m-1}' \\ \hline 0 & 0 \\ \hline y_{m+1} & y_{m+1}' \\ \vdots & \vdots \\ y_{2m-1} & y_{2m-1}' \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ s.t. rank $= 2n-2$

とし、これを改めて y とおく。

<u>2nd. step</u>

$\widetilde{A}_0 \in Sp_n$ をとり，$\widetilde{A}_0 X^* \widetilde{B}_0 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ としておく。即ち．

$X = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，$y = \left(\begin{array}{c|c} y_1 & y_3 \\ \hline y_2 & y_4 \end{array}\right)$ s.t. rank $[y_2\ y_4] = 2n$ と仮定してよい。

<u>3rd. step</u>

以下，Example 12 と同様の変形で，$Y_k = G_k \xi$ がわかる。

//

<u>Example 14</u>

$(GL_1^2 \times Spin_{10} \times GL_2$, (a half-spin rep.) $\otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1))$ は generic isotropy 群が SL_2 に含まれることより，I の Example 8 に帰着されて $Y_k = G_k \xi$ となる。

//

<u>Example 15</u>

$(GL_1^3 \times Spin_{10} \times GL_2$, (a half-spin rep.) $\otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1))$ も，generic isotropy 群が SL_2 に含まれることより，I の Example 8 に帰着され，$Y_k = G_k \xi$ となる。

//

まとめると.

<u>Theorem b</u>

Universally transitive open orbits をもつ, 既約でない 2-simple 正則 P.V. は, 以下の (1)〜(6) で, それらは, 上記の議論により, $Y_k = G_k$ となるから, Proposition a より, $Z_a(\omega) = \tau(G_3) Z_m(\omega)$ という関係式をもつ。

(1) $(GL_1 \times GL_5 \times GL_2,\ \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + (\Lambda_1^* + \Lambda_1^*) \otimes 1)$

(2) $(GL_1^2 \times Sp_m \times GL_{2m},\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1^{(*)} + \Lambda_1^{(*)})$

(3) $(GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m+1},\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1)$

(4) $(GL_1^3 \times Sp_m \times GL_{2m+1},\ \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1)^{(*)})$

(5) $(GL_1^2 \times Spin_{10} \times GL_2$, (a half-spin rep.)$\otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1))$

(6) $(GL_1^3 \times Spin_{10} \times GL_2$, (a half-spin rep.)$\otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1)$ //

<u>最後に.</u>

木村達雄先生には, この内容を完成させる際, P.V に関する計算法など数多くの事を教えていただき, また, いろいろはげましていただきました。ここに感謝の意を表します。 //

[参考文献]

[B] : A. Borel : Some finiteness properties of adele groups over Number field : IHES 1963, 101-12

[J] : J-I. Igusa : Zeta distributions associated with some invariants American. J. Math. 106 (1984), 1013 — 1032

[K1]: T. Kimura ; 概均質ベクトル空間の研究, 数学 32 (1980), 97–118

[K2]: 〃 ; 特異点の解消と Igusa local zeta function の計算 (京大数理研講究録 1987)

[KKH]: T. Kimura, S. Kasai and H. Hosokawa ; Universal transitivity of simple and 2-simple prehomogeneous vector spaces, Extrait des annales de L'institut Fourier Tome XXXVIII - Fascicule 2 (1988)

[Sa 1]: F. Sato ; Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II ; A convergence criterion, Tôhoku Math. J. 35 (1983). P.77–P.99

[Sa.2]: 〃 ; 東京大学に於ける概均質ベクトル空間の講義ノート (1988)

[S-K]: M. Sato and T. Kimura ; A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, Nagoya Math. J. 65 (1977), 1–55

[S-S]: M. Sato and T. Shintani ; 概均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み 15 (1970)

[Se]: J.P. Serre ; Local fields, Springer GTM 67

[T] ; J. Tate ; Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions Algebraic number theory, Academic Press, 1967, P.305 ~ P.347

[W1] ; A. Weil ; Adeles and algebraic groups, Institute for advanced study Princeton, N.J. 1961

[W2] ; 〃 ; Fonction zeta et distributions, collected papers Vol. III. 158–163

//